Jan Friso Groote
Informatica, Technische Universiteit Eindhoven
j.f.groote@tue.nl

Hans Zantema
Informatica, Technische Universiteit Eindhoven
Informatica, Radboud Universiteit, Nijmegen
h.zantema@tue.nl

Recreatieve wiskunde

De kans om Ganzenbord te winnen

In dit artikel analyseren Jan Friso Groote en Hans Zantema de kans op winst voor de verschillende spelers van het traditionele bordspel *Ganzenbord*. Deze kansen kan men berekenen voor maximaal vijf spelers, waarbij het aantal toestanden oploopt tot zeer grote omvang. Voor twee spelers kan men deze kansen exact uitrekenen als breuken waarvan de tellers en noemers uit duizenden cijfers bestaan. Een verrassend resultaat is dat bij twee spelers de kans op gelijk spel (een speler in de put en de ander in de gevangenis) substantieel is: bijna 23 procent.

Ganzenbord is een traditioneel bordspel. Het is algemeen bekend, vooral in Europa [1], en is de basis van veel variaties op dit spel. Het basisidee bestaat uit een aantal genummerde velden, waarbij het doel is het laatste veld te bereiken door om de beurt met een of twee dobbelstenen te gooien en het geworpen aantal ogen vooruit te gaan. Onderweg kom je allerlei hindernissen tegen, zoals de put en de gevangenis waarin je moet blijven tot een andere speler je komt bevrijden.

In [5] wordt Ganzenbord beschreven als “historically the most important spiral game ever devised” en wordt als een van de bronnen het Italië van Francesco de Medici (1574–1587) genoemd, terwijl in de oude geschiedenis van Egypte en Griekenland verwante spelen ook al populair waren.

Het huidige Ganzenbord kent 64 velden, genummerd van 0 tot en met 63, en wordt gespeeld met twee of meer spelers. Het spel is een puur geluksspel: het verloop van het spel wordt geheel bepaald door het werpen van dobbelstenen, en de spelers hebben geen enkele eigen keuze, in tegenstelling tot bijvoorbeeld *Mens erger je niet!*, waarbij de spelers nog kunnen kiezen welke van hun pionnen ze gaan spelen. Op grond hiervan ligt de kans om te winnen bij Ganzenbord voor elke speler helemaal vast. Een voor de hand liggende vraag is wat deze kans is voor elke speler, en dat is precies het onderwerp van dit artikel.

In tegenstelling tot pure kansspelen zoals Ganzenbord, is er veel analyse gedaan naar winst bij strategiespelen. Spelen als *Vier op ’n rij* [7] en beperkte vormen van *Awari* zijn helemaal doorgerekend. Voor de grote spelen als schaken, dammen en go is niet bekend of er een winnende strategie is, wel is de vraag of zo’n strategie bestaat goed gedefinieerd.

Voordat we met de analyse van Ganzenbord kunnen beginnen, moeten we eerst de regels precies vastleggen. Hoewel in grote lijnen de spelregels van de verschillende versies van Ganzenbord met elkaar overeenkomen, zijn er toch verschillen op detailpunten. Zo is de plaats waarnaar je terug moet springen als je op het doolhof op positie 42 komt in sommige uitvoeringen 30, en in andere 37. Hier hebben we een vrij willekeurige keuze gemaakt. Verder zijn er versies waarbij *fiches* uitgekeerd of betaald worden, een aspect dat wij buiten beschouwing laten. De precieze regels die wij volgen worden beschreven in de volgende paragraaf.

Een manier om de kans op winst te benaderen is door het spel een groot aantal keren te simuleren, en daarbij te tellen hoe vaak elke speler wint. Echter, deze methode convergeert zeer traag, en is daarmee niet geschikt om de kansen met grote precisie vast te stellen.

In plaats daarvan bouwen we de volledige toestandsruimte op, bestaande uit alle toestanden waarin het spel zich bij een gegeven aantal spelers kan bevinden. Voor elke toestand geven we een vergelijking voor de kans dat in die toestand een betreffende speler wint. Voor toestanden waarin het eindveld 63 bezet is, is dat makkelijk: als dat veld door de betreffende speler bezet is, is dat 1, en als dat door een andere speler is, is dat 0. Voor de overige toestanden bekijken we welke toestanden er vanuit die toestand bereikbaar zijn bij elke mogelijke dobbelsteenworp, en stellen de kans als gewogen gemiddelde van de kansen bij de vervolgtoestanden. Op deze manier krijgen we n lineaire vergelijkingen over n onbekenden, waarbij n het totaal aantal toestanden is. Dit lineaire stelsel kan met standaardmethoden worden opgelost. Dit aantal n loopt snel op met het aantal spelers, zo is n ongeveer 4000 voor Ganzenbord met twee spelers, maar rond de 885 miljoen voor vijf spelers.

Met behulp van Mathematica [2] kunnen we het spel met twee spelers exact oplossen, waarbij de resulterende kansen als breuken worden gegeven. Voor het spel met drie spelers is een exacte berekening niet meer haalbaar, maar wel een numerieke benadering. Het spel met vier spelers kunnen we numeriek oplossen met Matlab [3] met de *induced dimension reduction*-methode (IDR-methode) als uitbreiding [6]. Voor vijf spelers hebben we een oplossing met behulp van een ad-hoc-dekpuntalgoritme. Voor zes of meer spelers is het vaststellen van de kansen op winst met deze precisieaanpak vooralsnog buiten ons bereik.

De verkregen resultaten bevestigen op veel punten wat je intuïtief verwacht, maar wijken daar soms ook van af. Het meest verrassende was dat er bij het spel met twee spelers een substantiële kans, namelijk bijna 23 procent, is op gelijkspel: de eindsituatie waarbij een van de spelers in de put zit en de ander in de gevangenis.

Voor alle aantallen spelers die we onderzocht hebben, blijkt de speler die begint in het voordeel te zijn. Bij twee spelers is dit verschil nog geen 2 procent, bij vijf spelers loopt dit op tot bijna 10 procent. Het is ook interessant te kijken hoe de winstkansen beïnvloed worden door de posities op het bord. Voor twee spelers geven wij hiervoor driedimensionale diagrammen die de winstkansen geven met de beide posities van de spelers als parameters. Ook hier komen soms tegenintuïtieve resultaten uit, zo wordt de winstkans van een speler nauwelijks verhoogd als de tegenstander in de put komt.

De reden voor het analyseren van dit spel zit zeker niet alleen in de recreatieve sfeer. In de informatica is het verifiëren van eigenschappen van systemen met grote toestandsruimten een belangrijk onderwerp, en veel van dergelijke systemen vertonen probabilistisch gedrag. Op grond hiervan is het zinvol systemen met probabilistisch gedrag en een groot aantal toestanden te verkennen en door te rekenen, en ervaring op te doen met de beperkingen die daarin optreden. Hierin is Ganzenbord een eerste stap.

Alvorens Ganzenbord in detail te beschrijven beschouwen we eerst een zeer versimpelde versie om onze manier van oplossen toe te lichten.

0	1	2
start		einde

◎ ⊙

Hierin zijn er slechts drie velden, 0, 1 en 2, en de speler die het eerst op 2 komt heeft gewonnen. Er zijn twee spelers, en die werpen om de beurt met een munt waarop op de ene zijde een 0 staat en op de andere een 1, aangevende het aantal posities dat de speler vooruit mag. Dit spel kent toestanden (i,j,k) voor $i \in \{1,2\}$ en $j,k \in \{0,1,2\}$, waarbij (i,j,k) de toestand is waarbij speler i aan de beurt is, speler 1 op positie j staat en speler 2 op positie k staat. Niet al deze toestanden zijn bereikbaar, zo kunnen niet beide spelers op 2 staan, en komen de toestanden $(i,2,2)$ niet voor. We willen weten wat de kans is dat de beginner (speler 1) wint, en voeren daartoe variabelen q_{ijk} in, aangevende de kans dat speler 1 wint vanuit toestand (i,j,k). We willen dus weten wat de waarde is van q_{100}. Vanuit toestand $(1,0,0)$ werpt

speler 1 de munt. Met een kans van één op twee levert dat een 0, waarbij speler 1 op 0 blijft en daarna speler 2 aan de beurt is, en we aangekomen zijn in toestand $(2,0,0)$. Met ook een kans van één op twee had speler 1 een 1 geworpen, en is $(2,1,0)$ de nieuwe toestand. Dit levert de vergelijking $q_{100} = \frac{1}{2}q_{200} + \frac{1}{2}q_{210}$. Algemener geeft elke toestand (i,j,k) waarbij nog niet gewonnen is, dus $j,k < 2$, een vergelijking voor q_{ijk}: als $i = 1$ kan speler 1 naar j of $j+1$ gaan, met gelijke kans, waarna speler 2 aan de beurt is, dus $q_{1jk} = \frac{1}{2}q_{2jk} + \frac{1}{2}q_{2,j+1,k}$. Net zo voor speler 2: $q_{2jk} = \frac{1}{2}q_{1jk} + \frac{1}{2}q_{1,j,k+1}$. Verder heeft speler 1 gewonnen als hij op 2 komt, dus $q_{i2k} = 1$, en heeft speler 1 verloren als speler 2 op 2 komt, dus $q_{ij2} = 0$. In totaal geeft dit het hele stelsel

$$\begin{aligned}
q_{100} &= \tfrac{1}{2}q_{200} + \tfrac{1}{2}q_{210},\\
q_{200} &= \tfrac{1}{2}q_{100} + \tfrac{1}{2}q_{101},\\
q_{110} &= \tfrac{1}{2}q_{210} + \tfrac{1}{2}q_{220},\\
q_{112} &= 0,\\
q_{210} &= \tfrac{1}{2}q_{110} + \tfrac{1}{2}q_{111},\\
q_{220} &= 1,\\
q_{101} &= \tfrac{1}{2}q_{201} + \tfrac{1}{2}q_{211},\\
q_{111} &= \tfrac{1}{2}q_{211} + \tfrac{1}{2}q_{221},\\
q_{201} &= \tfrac{1}{2}q_{101} + \tfrac{1}{2}q_{102},\\
q_{211} &= \tfrac{1}{2}q_{111} + \tfrac{1}{2}q_{112},\\
q_{221} &= 1,\\
q_{102} &= 0,
\end{aligned}$$

met als oplossing

$$\begin{array}{lll}
q_{100} = \dfrac{16}{27}, & q_{200} = \dfrac{11}{27}, & q_{110} = \dfrac{8}{9},\\
q_{112} = 0, & q_{210} = \dfrac{7}{9}, & q_{220} = 1,\\
q_{101} = \dfrac{2}{9}, & q_{111} = \dfrac{2}{3}, & q_{201} = \dfrac{1}{9},\\
q_{211} = \dfrac{1}{3}, & q_{221} = 1, & q_{102} = 0.
\end{array}$$

In het bijzonder vinden wij hierin de gevraagde kans dat de beginner wint: $q_{100} = \frac{16}{27} \approx 0.59$.

Deze methode werkt voor elk spel met eindig veel toestanden waarin het spelverloop geheel door kansen wordt vastgelegd: voer voor elke toestand een variabele in die de kans aangeeft dat een bepaalde speler vanuit die toestand wint. Voor de winnende en verliezende toestanden wordt de vergelijking opgeleverd die deze variabele gelijkstelt aan 0 of 1. Voor de overige toestanden wordt gekeken welke toestanden in een stap bereikt kunnen worden, en wordt de vergelijking opgeleverd die de kans bij de gegeven toestand gelijkstelt aan het gewogen gemiddelde van de kansen bij de vervolgtoestanden. Op deze manier is er voor elke variabele precies één lineaire vergelijking. Vanaf dit moment kunnen we de betekenis van de variabelen vergeten, en elk gewenst mechanisme inzetten om de vergelijkingen op te lossen. Voor kleine stelsels zoals hierboven is dat nog heel goed met de hand te doen, voor grotere stelsels kunnen hulpmiddelen als Mathematica en Matlab behulpzaam zijn. In ontaarde gevallen, bijvoorbeeld bij het werpen van dobbelstenen die aan alle zijden 0 ogen hebben, kan het voorkomen dat het resulterende stelsel geen unieke oplossing heeft.

De spelregels van Ganzenbord

Dan zijn we nu toe aan het geven van de spelregels van Ganzenbord, waarin we op de detailpunten waarin verschillende in omloop zijnde versies van elkaar verschillen, een keuze vastleggen.

- Er zijn 64 velden, genummerd van 0 tot en met 63. Alle spelers starten op veld 0. De eerste speler die op veld 63 terechtkomt, wint.
- De spelers spelen om de beurt in een vaste volgorde.
- Een beurt van een speler bestaat uit het werpen van twee dobbelstenen, en het vooruitbewegen van evenveel plaatsen als er ogen zijn gegooid, tenzij de volgende regels iets anders voorschrijven.
- In het geval dat het veld waarop een speler terechtkomt al bezet is door een ander speler, gaat de speler weer terug naar waar hij vandaan kwam.
- Een speler wint alleen als hij precies op 63 terechtkomt; als hij voorbij 63 terecht zou komen moet hij het teveel geworpen aantal terugstappen vanaf 63.
- Op de velden 5, 9, 14, 18, 23, 27, 32, 36, 41, 45, 50, 54 en 59 is een gans aangegeven. Als een speler op een van deze velden terechtkomt, speelt hij hetzelfde aantal ogen nogmaals, in dezelfde richting als waarin gespeeld werd. Als dit weer een gans is, herhaalt dit proces zich.
- Als vanuit veld 0 een 3 en een 6 wordt geworpen, springt de speler in een keer naar 53. Als vanuit veld 0 een 4 en een 5 wordt geworpen, springt de speler in een keer naar 26. Merk op dat zonder deze regel de speler met de vorige regel in een keer op 63 terecht zou komen, omdat op alle negenvouden een gans is aangegeven.
- Veld 6 is de brug: een speler die hier aankomt gaat direct door naar veld 12.
- Veld 19 is de herberg: een speler die hier aankomt moet een beurt overslaan.
- Veld 31 is de put: een speler die hier aankomt moet hier net zolang blijven en doet niet mee met het spel tot een andere speler de put bereikt: dan doet deze speler weer mee en moet de ander in de put blijven.
- Veld 42 is het doolhof: een speler die hier terechtkomt gaat terug naar veld 30.
- Veld 52 is de gevangenis: een speler die hier aankomt moet hier net zolang blijven tot een andere speler de gevangenis bereikt; net zoals bij de put dus.
- Veld 58 is de dood: een speler die hier terecht komt gaat terug naar veld 0 en moet dus helemaal opnieuw beginnen.

Deze regels worden herhaaldelijk toegepast, waardoor een beurt uit een hele serie bewegingen kan bestaan. Als een speler bijvoorbeeld op veld 46 staat en 4 gooit, gaat hij naar 50. Dat is een gans, dus gaat hij naar 54. Dit is wederom een gans, dus gaat hij naar 58. Dat is de dood, dus hij moet helemaal opnieuw beginnen op veld 0. Als veld 0 al bezet is doordat een andere speler in een vorige beurt op de dood terechtkwam, kan deze hele beurt niet worden uitgevoerd, en blijft de speler staan op veld 46 waar de hele operatie begon. Als een ander voorbeeld beschouwen we een speler die op veld 60 twee zessen werpt, komt negen posities over de 63 heen, en moet dan dus naar 54. Aangezien dit een gans is, moet hij nogmaals 12 stappen doen in de gespeelde richting, dat is achteruit, dus naar 42. Omdat dit het doolhof is, gaat hij dan terug naar veld 30.

Merk op dat er door dit heen en weer spelen geen bovengrens is aan het aantal beurten dat een spel kan duren; de kans dat het spel onbeperkt lang doorgaat is echter 0.

In het geval van twee spelers zijn er drie mogelijke uitkomsten: de eerste of de tweede speler kan winnen door precies op veld 63 te komen, maar de derde mogelijkheid is een gelijkspel doordat het spel vastloopt in een toestand waarbij een speler in de put zit en de ander in de gevangenis. Bij meer dan twee spelers kan dit verschijnsel zich niet voordoen, omdat zowel de put als de gevangenis maar hoogstens één speler kan vasthouden, en er dus altijd nog een speler is die niet vast zit.

Bij het beschouwen van toestanden bij Ganzenbord is het basisidee hetzelfde als in het simpele spel dat net is beschreven: een toestand wordt aangegeven door de posities waar de spelers zich bevinden, en welke speler aan de beurt is. Bij elke toestand en elke mogelijke worp moet worden beschreven in welke nieuwe toestand het spel dan terechtkomt, en de bijbehorende vergelijking moet worden opgesteld, die de variabele van de oorspronkelijke toestand gelijkstelt aan het gewogen gemiddelde van de variabelen van de mogelijke vervolgtoestanden. Het vaststellen van de vervolgtoestanden kan best gecompliceerd zijn, zoals hierboven in enkele voorbeelden aangegeven, maar is wel precies gedefinieerd volgens een klein aantal simpele regels. Er zijn spelregels die afdwingen om nog een aantal extra toestanden in te voeren. Zo moeten alle toestanden waarbij een speler op de herberg staat verdubbeld worden: een toestand aangevende dat de beurt die moet worden overgeslagen nog moet komen, en een waarbij die al geweest is.

Het spel voor twee spelers

Bij twee spelers wordt de toestand in principe vastgelegd door de posities van beide spelers, en welke van de twee spelers aan de beurt is. Een eerste schatting van het aantal toestanden is dus het kwadraat van het aantal velden op het bord maal twee. Het werkelijke aantal is echter aanzienlijk kleiner, onder meer omdat veel velden nooit bezet zijn na het afhandelen van een worp: de ganzen, de brug, het doolhof en de dood, maar ook bijvoorbeeld veld 1. Het blijkt dat bij twee spelers het aantal bereikbare toestanden 4048 is. Voor elk van deze toestanden wordt een variabele ingevoerd die de kans aangeeft dat speler 1 wint, en een vergelijking opgesteld die deze variabele gelijkstelt aan een gewogen gemiddelde van de variabelen die horen bij de mogelijke vervolgtoestanden. Voor een toestand waarbij speler 1 op 63 staat wordt de waarde 1 ingevuld, en voor een toestand waarbij speler 2 op 63 staat, of waarbij de ene speler in de put zit en de ander in de gevangenis, is de waarde 0. Het oplossen hiervan levert voor de variabele horend bij beide spelers op veld 0, en speler 1 aan de beurt, de waarde

$$0{,}393625137393757391402840344876\ldots$$

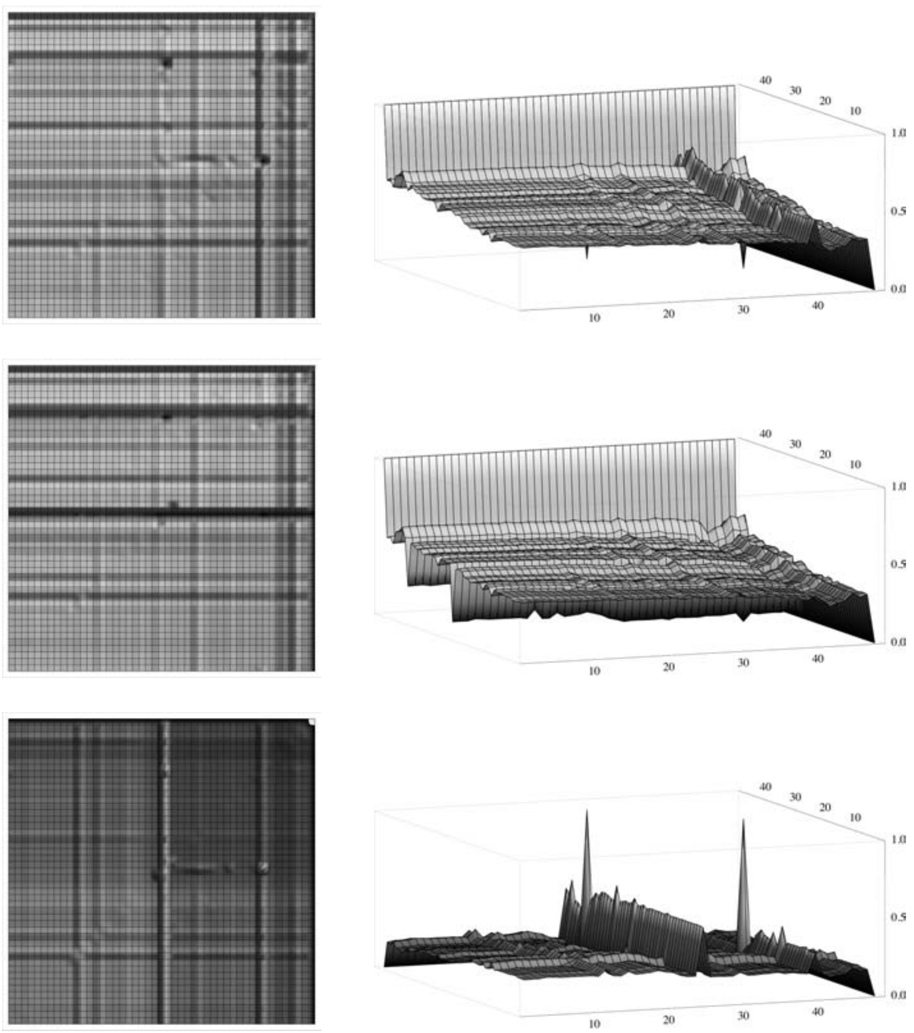
en dat is dus de kans dat de beginner wint. Voor zowel het opstellen van de vergelijkingen en het oplossen daarvan, is de hulp van de computer onontbeerlijk. Zowel het opstellen als oplossen hebben wij met verschillende middelen onafhankelijk van elkaar gedaan, en dat leverde steeds dit getal in al zijn decimalen op, wat een indicatie is voor correctheid. Kleine wijzigingen in de spelregels, bijvoorbeeld het weglaten van de beurt overslaan bij de herberg op 19, of het terugspringen naar een ander veld dan 30 bij het doolhof op 42 (zoals bij de spelregels van sommige uitvoeringen van Ganzenbord wordt aangegeven) leveren een waarde die wel ongeveer gelijk is aan deze waarde, maar niet exact. Bij het gebruiken van Mathematica als oplosmethode is het mogelijk de waarde exact te bepalen als breuk van twee positieve gehele getallen. Dit levert de breuk in Figuur 1 op. Deze breuk is de exacte waarde van de kans dat speler 1 wint, bij twee spelers.

Om de kans dat speler 2 wint te bepalen, stellen we hetzelfde stelsel vergelijkingen op, met als enige verschil dat nu de toestanden waarbij speler 2 op 63 staat een 1 leveren en de toestanden waarbij speler 1 op 63 staat een 0 leveren. Voor de kans op remise hebben we twee manieren: we kunnen toestanden waarin de put en gevangenis beide bezet zijn een 1 geven en toestanden met een speler op 63 een 0, en dat stelsel oplossen, of we kunnen de som van de winstkansen voor beide spelers van 1 aftrekken. Het resultaat is als volgt:

Kans dat speler 1 wint	$0{,}3936$
Kans dat speler 2 wint	$0{,}3799$
Kans op gelijkspel	$0{,}2265$

$$\begin{array}{c}
3545781381249501868178104892171827913177877987248026144100293284856089033694774316350182222558\\
3993094505071034590742382283764057125009045580237522393392809386038034575734129460455485554 28\\
1924084707999480531293508117855979752353281836016096493194294993498661854982397516733513417 69\\
5828390047831220906607135011534167115772479326845908104296820876742045145162064280232327731 42\\
9706838329030467908447066959073725866430390967400987024067437474986767838820626024932649262 23\\
838302824908562507570250392570595827698114873011234704695646697896143603966602499097872351154\\
669089452354191599916709746676851938051878405719576742617594702275857493698645246959330233303\\
091445902939904912863840744790654661105175111195454449663058266233638363673073343450482998878\\
224889581332206333579009718721098139784479036279112434678742992137019681147035075938046701550\\
918055159448125308748921320289899333197006467347143802920860473826874931173910161985261833871\\
891348234745481157765616175520794275559824385481401595657510498531296821490135004997149723846\\
312298317137414865283481215837836732118455291175984574489259882269507968728081889027165529711\\
660915404995631330437820160918345491253783805093745020459199567996953546847609820992902762908\\
750628689522634308453656275384033760133459102330761797545360967662642992417761488637785343096\\
179837783567510615016827169189382638260325730601238974784021870275751361465251485833641380988\\
601239137220474152073594938576999714048510670106244854187988128408120363500526256376389738531\\
527536713654289142088651349218285889196358082646355336459464707565595257453153280748427467824\\
804125023919836067186411643984746979465748585196447014561870836245035624955049440432350263977\\
824403133461025845332976436704285089656500992657870174243661788423998434592130682667322269405\\
049490116752141370798765615956317551142249979497567046069585441301567890743987803069586801932\\
669973979851519762918559922723993392470947267582828358727134952210072937955951818226524755153\\
725945829745811214804332328703353196315111784798277410263357528661496628912933728773218555977\\
962282140759639089508990171920383431393394642405434973415711204469313507363576994397787067207\\
425052329110883835493651467371006199576012293462207442967865421344357444321357800987822349475\\
376878156929670045445507371744044527718465666904104107234441730939460632072987861228015467811\\
882360487748332166057469542836916432762990864234404289049048042068157866859460085236085608315\\
623668882716193909184091442443597083669348518632793885704717828545288254527572206829503888843\\
189830953755201841220373817976349249436975535253449029794712313365966457380552647526110163477\\
309530899123504784001358147399949405347287670149449824157437381968509825640543358543867976582\\
112932024845249858864855940315369112486827116397833485123121716079117281508469354925885409764\\
674924868096271749236366074963266182936247416433242594731524706999193767511101871330792678259\\
280382594971805430937807818516642167895701603935105753261288618047393431315053008943441431152\\
112314766320450756187900149495780206679762576019422616321340814720511095615601551532129272718\\
542739705072677966046511469321938635400662566613122323344475936596007879096566202575850204524\\
189676551943771629765498166351584803390675990234443292078393699164128871377784023956250048044\\
331552068284643624644046415414958009203064443229091249119093243635766772160882604554315879605\\
060831221307872086909952800271602369875618608782388082232510649386131941136637973880915801002\\
154572511895832800230367533198381720968690002760891453868273714176187898521616789993779960852\\
761931148923821002490024262343407522301166428721085616227115222756065531414838764999639026632\\
039441391801485622144284338102119223432872300849269879911935735471566830470688649086825183967\\
844807850946421646147394307730886861802798090936151774215069265819265138777116887920005066844\\
010830068931878504072308068647265799544023019246293329832623031453567259134862222156900665676\\
786448672835928798628020069958939032396484550567944379409480283\\
\hline
900801560775964656126774493326889579738207808673590850978148447654100516265185014530331647892\\
963003549157974321305021253246292417449947288406287943081249483047759028012482686458088710035\\
667076237996138211920100304931630064917887932900820281965696801766239831673398209178450364993\\
664141772270799113017382685324511970805425293800448269497362017976312673299247677364939829441\\
356682373589121359929188239605113065014562579196471221602072740197329678855003920081111125071\\
562181004087297676021601547101904445991031881920268404465974551250191245335606564444955874790\\
579668842903908691859663445026042171718496802772890001540462085862285203596824508136312510930\\
848256782907319085401577950566480236492258368651403851498168474838648238887253361826278320974\\
211582989769501836744362197433090321629992797581960180227991741382084013179433356134386879465\\
593763466375933164532378142992032030676788266593780697459863590954425340611505393883463891170\\
971971064338366560257877714490386750914477743904362410695314284442222150192349474163351136665\\
216496309031156352596603819405940309695923665530872630461144194903750285125269104079009482059\\
449373800161294244270975727298452311247329735693384663705652207467764860758084365569131209291\\
229381384664939466470853167529986572849474795951706727760432071740948785034512160370763120637\\
339519772942758900998043467561936589952119274344302734511358915860188099372260220328866589088\\
156263594454570824879678437060954154474559388781342874179426124184682655203719929399964083174\\
163103613617183832005419973105753767668901642442011068968931764251547938499039025283281070521\\
626469361626355506807630054195079424417327991706187186940870807368776939235542166982376805364\\
554504077292848886835539066227774214224562642653978516302884675382241286557954761373473131260\\
398683754349784037651478869577494891197647440888866724744290474747707116650727026018201161485\\
468721477586155819906563951435363663409456413316958670299530968871213165410259673299779136449\\
546570382066086147033604221435389641473231140715280626878852774956863960299786109914398931518\\
303131212483531294493331159638610052553627850621091892922181967442078061555180719269959611691\\
375488038095571656477654073523484609997634483232600502379658428980870346360321738192432670388\\
030086044391330549464290582334683133818870134666528351268436864593343373928316778450239320151\\
490616017571218225599667338674345549599369213030835046237448574463407637323433037344642693651\\
701648988954227861867925754021764324627782273822196813395500498990947900775262466674566797502\\
538208692635181129126570140804676875824884483807381185441791415008023307041497487737249042310\\
505372990270640822151972277764575305052107974872293504455660045611058486209180538423771137278\\
665443687822206785250296004711649547019031985510776338368259491949746485804668295542587032964\\
330180313351672274528115527876257178151725307206824846802270199905183486827906401182641218870\\
282587165253232412527268173813719376856485718148441478527543006201364921512289327167966829752\\
840415669558102361080423578070292648605539487934572107269958992134149955478331466018851569593\\
718356612338981495161662932308349814571401207328017569896080483808315461551874907047767528969\\
200021893878774750118480746745401602759010790621652738798780702998291443204275453806422937174\\
486042713846526300307683386755779988859765442464426523581101010235589403184706181157183193989\\
204685507819243217476508781703035183919970452946772074659104050764081839159268568343117208670\\
821350611437447602059630356954342172567631055484692745718321278817807410839504476278638075658\\
957815114791859980138843196023327044410709069485441809674404861155840974443329069685443563451\\
000330064673984317988986377130965450283592011509535800247907476188834267070613796557088503934\\
717084645791126874032339497526018300237585065551096520626437434582945009801773336358068326941\\
285478875469093008017253189675909895843648482906710452459750563144869260744545121189657756675\\
3191653418733360283585073225627136513606612524945418565535662080
\end{array}$$

Figuur 1



Figuur 2

De kans op gelijkspel, dat wil zeggen dat het spel eindigt met een speler in de put en de ander in de gevangenis, is dus bijna 23 procent: veel groter dan aanvankelijk verwacht.

Het is interessant uit te zoeken hoe de winstkansen veranderen in de loop van het van het spel. Voor het spel met twee personen kan dit in een driedimensionale grafiek worden weergegeven, waarbij de x-as en de y-as de posities van beide spelers aangeven, beiden lopend over de 47 mogelijke posities waarin een speler zich kan bevinden, en de hoogte een kans. In Figuur 2 doen we dit van boven naar beneden voor drie mogelijke kansen: de kans dat speler 1 wint als speler 1 aan de beurt is, de kans dat speler 1 wint als speler 2 aan de beurt is, en de kans op gelijkspel. Van elk van deze grafieken geven we naast elkaar een bovenaanzicht en een vooraanzicht, waarbij donkere kleuren een kleine kans (laag in de grafiek) en lichte kleuren een grote kans (hoog in de grafiek) aangeven.

Deze grafieken geven een aantal verschijnselen die zeer te verwachten zijn: bij de bovenste twee plaatjes zien we een muur tegen de achterwand, aangevende dat de kans 1 is als speler 1 op 63 staat, en een diep dal aan de rechterkant, aangevende de kans 0 als speler 2 op 63 staat. Ruwweg wordt de kans op winst groter naarmate de 63 dichter is genaderd voor speler 1, en kleiner naarmate 63 dichter is genaderd voor speler 2.

Opmerkelijk is dat als speler 2 in de gevangenis (52) zit dit zoals te verwachten de kans op winst voor speler 1 verhoogt, maar als speler 2 in de put (31) zit is dit nauwelijks het geval. Een verklaring hiervoor is te vinden in de onderste grafiek: als speler 2 in de put zit, dan is er een substantiële kans op gelijkspel. De twee pieken in de onderste grafiek geven de kans 1 op gelijkspel in de twee toestanden waarin put en gevangenis beiden bezet zijn.

Er zijn nog meer verschijnselen uit deze grafieken af te lezen, bijvoorbeeld dat het niet in je voordeel is om op de posities vlak voor 63 terecht te komen.

Het spel voor meer dan twee spelers

Voor meer dan twee spelers kan in principe op dezelfde manier de winstkans voor elke speler worden vastgesteld. Een complicatie is wel dat het aantal toestanden, en daarmee het aantal variabelen en vergelijkingen, exponentieel toeneemt met het aantal spelers: voor N spelers is dit ruwweg Nc^N waarbij $c \approx 45$. In Tabel 1 geven we winstkansen voor de verschillende spelers weer voor zover we die hebben kunnen vaststellen: voor het vaststellen van deze waarden zijn we begonnen met het oplossen van de stelsels lineaire vergelijkingen met behulp van Mathematica [2]. Dit konden we exact doen voor twee spelers, zoals aangegeven in de vorige paragraaf, en dit kon numeriek voor drie spelers. Voor vier spelers zijn we overgestapt naar Matlab, uitgebreid met het IDR-pakket [3, 6], en konden daarmee de stelsels vergelijkingen numeriek oplossen; hiervoor was 400 Gbyte geheugen nodig.

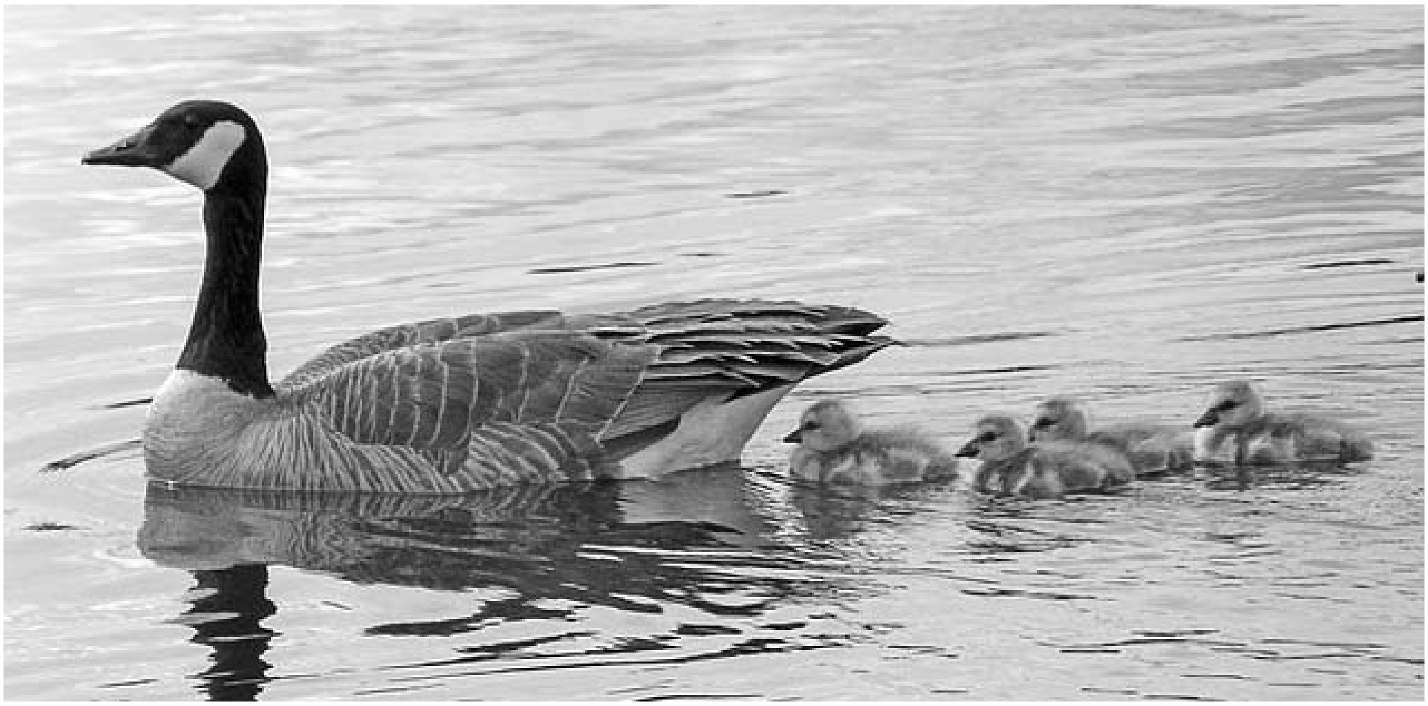
Door het uitbuiten van de speciale structuur van de vergelijkingen kunnen we echter nog een stap verder komen. Alle vergelijkingen zijn van de vorm

$$p_i = c_{i1}p_{i1} + \cdots + c_{ik}p_{ik},$$

waarin c_{ij} getallen tussen 0 en 1 zijn, waarvan de som over j gelijk aan 1 is, afgezien van twee variabelen die de waarden 0 en 1 hebben. Dit stelsel kan nu gezien worden als een monotone operator, waarvan de gevraagde oplossing een dekpunt is. Deze oplossing kan benaderd worden door dekpunt iteratie: geef

	#vergelijkingen	speler 1	speler 2	speler 3	speler 4
twee spelers	4048	0,39363	0,37999	-	-
drie spelers	$2{,}79 \times 10^5$	0,34596	0,33290	0,32114	-
vier spelers	$1{,}64 \times 10^7$	0,26695	0,25471	0,24408	0,23426
vijf spelers	$8{,}85 \times 10^8$	0,22039	x	x	x

Tabel 1



eerst alle p's de waarde 1. Vervolgens wordt een groot aantal slagen uitgevoerd, waarbij in elke slag de nieuwe benadering van p_i bepaald wordt als $c_{i1}p_{i1} + \cdots + c_{ik}p_{ik}$, waarin voor $p_{i1}, \ldots, p_{ik}$ de laatst verkregen benaderingen worden ingevuld. In elke stap is nu voor elke p_i de nieuwe waarde kleiner of gelijk aan de vorige waarde, en zo wordt voor elke i een dalende rij waarden voor p_i verkregen, die uiteindelijk convergeert naar de juiste waarde van p_i. Voor vijf spelers is de gegeven waarde bepaald door dit proces te herhalen totdat de gegeven waarde stabiel is. Per constructie zijn deze benaderingen allemaal bovengrenzen: het is een invariant van dit proces dat elke benadering groter of gelijk is aan de echte oplossing. Op een soortgelijke manier zijn ondergrenzen te verkrijgen door te beginnen met alle p's de waarde 0 te geven. Met het genereren van ondergrenzen en bovengrenzen die voldoende dicht bij elkaar liggen, kan de juiste waarde met elke gewenste precisie worden bepaald.

Voor zes spelers is het aantal vergelijkingen ongeveer 5×10^{10}, en daarmee te groot om dit proces binnen redelijke tijd uit te voeren.

Referenties

1. H.C. Bolton, The game of goose, *The Journal of American Folklore* 8 (1985), 145–150.
2. Mathematica Version 8.0, Wolfram Research, Inc., Champaign, IL, 2010.
3. MATLAB version 7.10.0 (R2010a), The MathWorks Inc., Natick, MA, 2010.
4. J.W. Romein en H.E. Bal, Solving the Game of Awari using Parallel Retrograde Analysis, *IEEE Computer* 38 (2003), 26–33.
5. A.H. Seville, Tradition and Variation in the Game of Goose, *Board Games in Academia III*, Proceedings of Colloquium in Florence, 1999, pp. 163–174.
6. P. Sonneveld en M.B. van Gijzen, IDR(s): a family of simple and fast algorithms for solving large nonsymmetric linear systems, *SIAM Journal of Scientific Computing* 31 (2008), 1035–1062.
7. J.W.H.M. Uiterwijk, H.J. van den Herik en L.V. Allis, A Knowledge-Based Approach to Connect- Four. The Game is Solved! *Heuristic Programming in Artificial Intelligence: the first computer olympiad*, D.N.L. Levy en D.F. Beal, eds., Ellis Horwood Limited, Chichester, 1989, pp. 113–133.